CONCOURS COMMUN MINES-PONTS... 1976

OPTION P' - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve spécifique aux candidats de l'option P' comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

On considère un espace affine euclidien P de dimension 2 (plan affine euclidien), dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle.

Si m_1, m_2 appartiennent à P, on note $[m_1,m_2]$ le segment d'extrémités m_1,m_2 , et $]m_1,m_2]$, $[m_1,m_2[$, $]m_1,m_2[$ les ensembles $[m_1,m_2]-\{m_1\}$, $[m_1,m_2]-\{m_2\}$, $[m_1,m_2]-\{m_1,m_2\}$ respectivement On rappelle qu'une partie K de P est convexe si : $(\forall (m_1,m_2)\in K^2)\ ([m_1,m_2]\subset K)$. Si $m_1,\ldots, m_n$, m appartiennent à P, m est un barycentre (resp. barycentre strict) de $m_1,\ldots, m_n$ s'il existe des réels $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ positifs (resp. strictement positifs) tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et que m soit le barycentre des points m_i affectés des scalaires λ_i. Si n = 3, on note T_{m_1,m_2,m_3} (resp. $\mathcal{T}_{m_1,m_2,m_3}$) l'ensemble des barycentres (resp. barycentres stricts) de m_1,m_2,m_3.

Si A est une partie de P, $\mathring{A}$, $\bar{A}$, Fr(A) désignent respectivement l'intérieur, l'adhérence, la frontière de A.

PARTIE O

1°) Montrer que $\mathcal{T}_{m_1,m_2,m_3}$ est ouvert si les points m_1,m_2,m_3 de P ne sont pas alignés.

2°) Soit C une partie convexe de P contenant les points m_1,m_2,m_3. Montrer que C contient T_{m_1,m_2,m_3}.

PARTIE I

Dans cette partie, on considère un compact convexe K d'intérieur non vide de P, et un point O intérieur à K.

1°) - a) Si m appartient à Fr(K), montrer que $[O,m[$ est contenu dans $\mathring{K}$.

- b) En déduire que l'on a $K = \overline{\mathring{K}}$ (K est égal à l'adhérence de son intérieur).

2°) Si θ est un réel, on note D_θ la demi-droite de P d'origine O, dirigée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$.

- a) Décrire l'intersection $D_\theta \cap K$, et en déduire que l'intersection $D_\theta \cap Fr(K)$ a exactement un élément, que l'on note $\mu_0(\theta)$, ou plus simplement $\mu(\theta)$. On définit ainsi une application μ_0, ou plus simplement μ, de $\mathbb{R}$ dans P.

- b) Montrer que $\mathring{K}$ est convexe .

- c) Montrer que toute droite D de P passant par un point intérieur à K rencontre Fr(K) en exactement deux points U,V, et que l'on a : $D \cap \mathring{K} =]U,V[$.

.../...

- d) Montrer que μ possède les propriétés suivantes :

(i) $\left(\forall\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2\right)\quad \left(\mu(\theta) = \mu(\theta') \longleftrightarrow \theta - \theta' \in 2\pi\,\mathbb{Z}\right)$

(ii) L'image de μ est Fr(K)

(iii) μ est continue . (On pourra par exemple raisonner par l'absurde).

3°) On suppose ici que l'application $\mu = \mu_0$ précédemment définie vérifie :

(P) μ est de classe C^2 et, pour tout réel θ, les vecteurs $\frac{d\vec{\mu}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{d^2\vec{\mu}}{d\theta^2}(\theta)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On donne un réel θ_0, on note A le point $\mu(\theta_0)$, $\vec{u}$ le vecteur $\vec{\mu}'(\theta_0)$, $\vec{v}$ le vecteur $\vec{\mu}''(\theta_0)$, T_A (resp. N_A) la droite de P passant par A, dirigée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) [T_A est dite ici tangente en A à Fr(K)]. Enfin, si m appartient à P, on note (p(m),q(m)) ses coordonnées dans le repère affine $(A,\vec{u},\vec{v})$ et π le demi-plan ouvert de P d'équation $q > 0$.

- a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

(i) $\left(\forall\ \theta \in [\theta_0 - \alpha, \theta_0[\ \right)\quad \left(p(\mu(\theta)) < 0 \text{ et } \mu(\theta) \in \pi\right)$

(ii) $\left(\forall\ \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \alpha]\right)\quad \left(p(\mu(\theta)) > 0 \text{ et } \mu(\theta) \in \pi\right)$

- b) Soit A' un point de $T_A \cap \mathrm{Fr}(K)$, distinct de A, et tel que, par exemple, $p(A') > 0$. Soit B le point $\mu(\theta_0 - \alpha)$. Montrer $\mathcal{C}_{B,A,A'}$, $C \overset{\circ}{K}$, et conclure qu'il existe des réels c, d strictement positifs tels que l'on ait : $c\,p(\mu(\theta)) + d\,q(\mu(\theta)) \geq 1$ pour θ dans $]\theta_0, \theta_0 + \alpha]$.

- c) Déduire de ce qui précède : $T_A \cap \mathrm{Fr}(K) = \{A\}$, puis $T_A \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$, puis que K est contenu dans l'adhérence de π .

- d) Montrer que T_A est la seule droite D de P passant par A telle que $D \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$.

- e) En convenant de dire que les tangentes à Fr(K) rencontrent Fr(K) en deux points confondus, montrer que toute droite de P passant par un point de K rencontre Fr(K) en exactement deux points.

PARTIE II

Dans cette partie, on considère un compact convexe K de P, d'intérieur non vide. D'après I, si Ω est un point intérieur à K, l'application μ_Ω de $\mathbb{R}$ dans P (cf. I - 2°) -a))est continue.

On pose alors : $f(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \overrightarrow{\Omega\mu_\Omega(\theta)} \right\| d\theta$, et l'on définit ainsi une application f de $\overset{\circ}{K}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs, dont on se propose d'étudier certaines propriétés.

1°) - a) Montrer que f prend des valeurs strictement positives, et que f est bornée ; on pose dans ce qui suit : $M_f = \sup_{\Omega \in \overset{\circ}{K}} f(\Omega)$.

.../...

- b) Montrer, pour Ω élément de $\overset{\circ}{K}$, l'inégalité : (*) $f(\Omega) \leqslant \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, où S désigne l'aire de K. Que dire de K, si, avec les mêmes notations, on a l'égalité : (**) $f(\Omega) = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$?

2°) Soient Ω,Ω' des points <u>distincts</u> de $\overset{\circ}{K}$, et I le milieu du segment $[\Omega,\Omega']$.

- a) Montrer : $I \in \overset{\circ}{K}$

- b) On suppose <u>désormais</u> qu'il existe un point O de $\overset{\circ}{K}$ tel que μ_0 satisfasse à la condition (P) introduite en I - 3°). Montrer l'inégalité stricte : $f(\Omega) + f(\Omega') < 2\,f(I)$.

- c) En déduire que l'ensemble des points m de $\overset{\circ}{K}$ tels que $f(m) = M_f$ a au plus un élément.

3°) Montrer qu'il existe une suite Ω_n dans $\overset{\circ}{K}$, qui converge dans K et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\Omega_n) = M_f$.

4°) On suppose ici que K admet un centre de symétrie S .

- a) Montrer : $S \in \overset{\circ}{K}$, ainsi que : $f(S) = M_f$

- b) Montrer qu'il existe au moins quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 de Fr(K) tels que : $f(S) = \| \overrightarrow{Sm_i} \|$ pour i appartenant à $\{1,2,3,4\}$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail